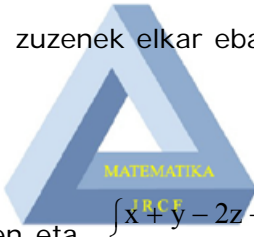


1. Bila ezazu $A(2,0,3)$ puntutik eta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{3}$ zuzenetik pasatzen den planoaren ekuazioa.
 Sol: $8x-y-5z-1=0$
2. Eztabaida ezazu ea $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ eta $\begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$ zuzenek elkar ebakitzen duten. Baiezkoan, bila ezazu ebaki-puntua.
 Sol: $(-1,-2,5)$ puntuan ebakitzen dira.
 
3. Bila ezazu $\begin{cases} 2x+y-z-1=0 \\ x-y-2z+1=0 \end{cases}$ zuzenarekiko paraleloa den eta $\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{cases}$ zuzena bere barnean duen planoaren ekuazioa.
 Sol: $4x+y-3z+1=0$
4. Bila ezazu b parametroaren balioa, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{2}$ eta $\frac{x}{4} = \frac{y+b}{-1} = \frac{z-1}{2}$ zuzenek elkar ebaki ditzaten eta kalkula ezazu ebaki-gunea b -ren balioa horretarako.
 Sol: $b=11$; $(6,-25/2,4)$
5. Kalkula ezazu $x-3 = y = z-2$ zuzenarekiko $P(1,0,1)$ puntuaren puntu simetrikoa.
 Sol: $(3,-2,1)$
6. Bila ezazu $M(1,-2,0)$ puntutik eta $3x-2y+6z-9=0$ planotik distantziakidea den OZ ardatzeko puntua.
 Sol: $(0,0,-2)$
7. Bila ezazu $M1(-6,1,-5)$, $M2(7,-2,-1)$ eta $M3(10,7,-1)$ puntuetatik pasatzen den planoarekiko $P(3,-4,-6)$ puntuaren puntu simetrikoa.
 Sol: $(1,-2,2)$
8. Bila ezazu $\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$ zuzenarekiko $P(4,1,6)$ puntuaren Q puntu simetrikoa.
 Sol: $(2,-3,2)$
9. Bila ezazu $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{3}$ zuzenetik pasatzen den, eta $3x+2y-z-5=0$ planoari elkarzuta den planoaren ekuazioa.
 Sol: $3x-24y-26z+1=0$
10. Bila ezazu $P(5,2,-1)$ puntuaren proiektzioa, $2x-y+3z+23=0$ planoan.
 Sol: $(1,4,-7)$
11. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ zuzena eta $A(3,5,-1)$ puntua emanik, bila ezazu zuzeneko B puntu bat jakinik A eta B puntuetatik pasatzen den zuzena $3x-2y+z+13=0$ planoari paraleloa dela.
 Sol: $(-1,-3,-5)$
12. Bila ezazu $M(0,1,2)$ puntutik doan, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ zuzenari elkarzuta den eta beronekin ebakitzen den zuzenaren ekuazioa.
 Sol: $\{x=3/5t, y=1-1/5t, z=2-t\}$

13. Bila ezazu $\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$ zuzena barne duen eta $\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ x - y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ zuzenari paraleloa den planoaren ekuazioa.
 Sol: $4x + y - 3z + 1 = 0$
14. A(1,0,0), B(0,2,0) eta C(2,1,0) puntuak emanik, aurki ezazu $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ zuzenarekiko D laugarren puntu bat, zeinetarako lau puntuek mugatutako tetraedroaren bolumena $1 u^3$ den.
 Sol: (3, 1, -2)
15. Erpintzat ondoko puntu hauek dituen triangeluaren azalera aurki ezazu: A(3,5,-2), B(2,1,-1) eta C, $x-z-5=0$ planoarekiko B-ren simetrikoa.
 Sol: $4\sqrt{2} u^2$
16. Froga ezazu, A(1,1,-2) puntua ez dela B(0,0,0), C(1,0,0) eta D(0,1,2) puntuen planokidea, eta aurki ezazu A puntutik BCD planorainoko distantzia.
 Sol: $\frac{4}{\sqrt{5}} u$
17. Aurki ezazu $3x-4y+1=0$ eta $4x+3y+2=0$ planoen distantziakidea den $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ zuzeneko puntu bat.
 Sol: (2/15, 14/15, 1/15) (14/5, -2/5, 7/5)
18. Kalkula itzazu $\frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z}{-1}$ zuzenarekiko P(1,0,1) puntuaren simetrikoa den Q puntuaren koordenatuak.
 Sol: (-5/3, 8/3, -5/3)
19. Plano bat M1(6,-10,1) puntutik pasatzen da, OX ardatzean a= -3 segmentua eta OZ ardatzean c=2 segmentua bitartekotzen dituelarik. Aurki ezazu planoaren ekuazioa eta beronek OY ardatzean bitartekotzen duen segmentua.
 Sol: (0, -4, 0)
20. Aurki ezazu A(0,2,0) eta B(0,0,2) puntuetatik pasatzen den plano, jakinik OX ardatza C puntuan ebakitzen duela, eta ABC triangeluaren azalera $2\sqrt{3} u^2$ dela.
 Sol: $x-y-z+2=0$, $x+y+z-2=0$
21. Aurki itzazu M(0,1,0) puntutik pasatzen den, eta $2x-y+z=0$ planoari paraleloa den $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = 1-2t \end{cases}$ zuzenari perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.
 Sol: $\{x=0, y=1+t, z=t\}$
22. Aurki ezazu P(7,9,7) puntutik $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ zuzenerainoko distantzia.
 Sol: $\sqrt{22} u$
23. $5 u^3$ ko bolumena duen tetraedro baten lau erpinetariko hiru A(2,1,-1), B(3,0,1) eta C(2,-1,3) dira. Aurki ezazu D laugarren erpinaren koordenatuak, OY ardatzean kokaturik dagoela jakinda.
 Sol: (0, -7, 0)
24. Aurki ezazu $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{-1}$ zuzeneko puntu bat, non P(1,3,2) puntuarekin batera $2x-y+z+1=0$ planoarekiko paraleloa den zuzena definitzen duen.
 Sol: (3, 1, -4)

25. Aurki ezazu $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}$ zuzena barne duen eta $\frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$ zuzena-
ren paraleloa den planoaren ekuazioa.
Sol: $23x-16y+10z-153=0$
26. Aurki ezazu $r: x=y=z$ eta $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ zuzenak perpendikularki ebakitzen
dituen zuzenaren ekuazioa.
Sol: $\begin{cases} y-z=0 \\ 4x+y+7z+1=0 \end{cases}$
27. Egiazta ezazu, $A(2,1,-1)$ eta $B(3,1,0)$ puntuetatik pasatzen den zuzena, $x-z-5=0$
ekuazioa duen planoaren paraleloa dela, eta aurki ezazu aipaturiko planoarekiko plano
simetrikoa.
Sol: $\{x=4+t, y=1, z=-3+t\}$
28. Aurki ezazu $r: \frac{x-2}{-5} = \frac{y}{3} = \frac{z-6}{2}$ eta $s: \begin{cases} x=t+22 \\ y=t \\ z=-2t-11 \end{cases}$ zuzenetan euskarrizten den eta
biekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.
Sol: $\{x=29/2+t, y=-15/2+t, z=1+t\}$
29. Aurki ezazu $P(1,0,2)$ puntutik pasatzen den, eta $r: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = z$ eta $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$
zuzenetan sostengatzen den zuzenaren ekuazioa.
Sol: $\begin{cases} 2x-y-z-3=0 \\ 2x+5y-2z+2=0 \end{cases}$
30. $z=5$ planoan kokaturik dagoen karratu baten aurkako bi erpin, $A(3,0,5)$ eta $C(-4,1,5)$,
ezagutzen dira. Aurki ezazu beste bi erpinetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa.
Sol: $\{x=1+t, y=11+14t, z=5\}$
31. $P(2,0,1)$ eta $Q(4,2,-3)$ puntuak plano batekiko simetrikoak dira. Aurki ezazu plano
honen ekuazioa eta Q puntutik planorainoko distantzia.
Sol: $x+y-2z-6=0$
32. Kubo batek bere aurpegietako bi $2x-2y+z-1=0$ eta $2x-2y+z+5=0$ planoetan ditu.
Aurki ezazu kuboaren bolumena.
Sol: $8 u^3$
33. Karratu baten erpinetako bat $P(1,1,0)$ puntua da eta diagonal baten ekuazioa $x=y=z$
. Aurki ezazu karratuaren azalera.
Sol: $4/3 u^2$
34. $A(0,2,0)$ eta $B(0,0,2)$ puntuetatik igaro eta OX ardatza C puntuan ebakitzen duen
planoaren ekuazioa bila ezazu, jakinda ABC triangeluaren azalera $2\sqrt{3}$ unitate karratu
dela.
Sol: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$
35. $r: \begin{cases} x=az+2 \\ y=z-3 \end{cases}$ eta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = z$ zuzenak emanik, aurki itzazu a eta b , zuzen biak
perpendikularrak direla eta puntu batetan elkar ebakitzen dutela jakinik. Aurki ezazu
puntu hori.
Sol: $(7/3, -7/3, 2/3)$



36. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ zuzena emanik, aurki itzazu XOY planoarekiko zuzen simetrikoaren ekuazioak.
 Sol: $\{x=1+t, y=2t, z=1+t\}$
37. Aurki ezazu ondoko baldintzak betetzen dituen zuzenaren ekuazioa: A(1,1,1) puntutik pasatzen da, $x-2y-z=0$ planoari paraleloa da eta $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ zuzenaren planokidea da.
 Sol: $\{x=1+t, y=1, z=1+t\}$
38. P(3,1,-1) puntutik pasatzen plano bat $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = z$ zuzenaren paraleloa da eta $2x+3y-z+5=0$ planoaren perpendikularra. Aurki ezazu plano horren ekuazioa, eta plano horretatik $\sqrt{3}$ unitateko distantziara dagoen OY ardatzeko puntua.
 Sol: $(0,-6,0)$
39. Kubo batek, bere erpinetariko bat P(1,1,1) puntuan dauka, eta bere aurpegietariko bat, koordenatu-jatorritik pasatzen den planoan kokaturik dago, beraz ondoko zuzenen paraleloa delarik: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{0}$ $s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{0}$ Kalkula ezazu kuboaren bolumena.
 Sol: $1 u^3$
40. Aurki ezazu $x-y+2z=1$ planoaren perpendikularra den zuzena, koordenatu-jatorritik hurbilen dagoen aipaturiko planoko puntutik pasatzen dena. Kalkula ezazu koordenatu-jatorritik planorako distantzia.
 Sol: $\frac{\sqrt{6}}{6} u$
41. $r: \begin{cases} z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ zuzenetik pasatzen den plano batetik jatorrira dagoen distantzia $\frac{1}{\sqrt{3}}$ unitatekoa da. Aurki ezazu planoaren ekuazioa. Soluzio bakarra da?
 Sol: $x+y+z-1=0$ eta $x+y-z-1=0$
42. Aurki ezazu a-ren balioa $r: \begin{cases} x-2z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$ eta $s: \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=a \end{cases}$ zuzenak plano berean egon daitezen. Bila ezazu plano honen ekuazioa.
 Sol: $a=-4; x-5y+3z+9=0$
43. Eraiki al daiteke karratu bat, halako eran non beraren aldeetako bi $r: \frac{x-1}{2} = y = z+1$ eta $s: \begin{cases} x-2y-2=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ zuzenen gainean egongo diren? Erantzuna baiezkoa bada, zein izango da aipatutako karratuaren azalera?
 Sol: $7/3 u^2$
44. P(1,0,-1) puntuaren π planoaren gaineko proiektzio ortogonalak Q(-3,2,5) puntua da. Aurki itzazu plano honen ekuazioa eta berarekiko P-ren puntu simetrikoa.
 Sol: $2x-y-3z+23=0; (-7,4,11)$
45. $4 u^3$ kotako bolumena duen kubo baten bi aurpegi ondoko planoen gainean daude: $\begin{cases} 3x+4y+12z+a=0 \\ 6x+8y+24z+36=0 \end{cases}$. Aurki itzazu a-ren balio posibleak.
 Sol: $a=18+13 \cdot \sqrt[3]{4}$ eta $a=18-13 \cdot \sqrt[3]{4}$

46. $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$, $D(1,1,4)$ erpinak dituen piramidea emanik
 a) Oinarritzat $OABC$ plano hartuta, bila ezazu altueraren ekuazioa.
 b) Kalkula ezazu piramidearen bolumena.

Sol: $\{x=1, y=1, z=4t\}$; $16/3 u^3$

47. $\frac{x-1}{3} = y = \frac{z+2}{-1}$ zuzena $x+2y-z=0$ planoan ortogonalki proiektatzerakoan sortzen duen zuzenaren ekuazio parametrikokoak bila itzazu.

Sol: $\{x=1/2+t, y=-1-1/2t, z=-3/2\}$

48. R zuzena eta π planoak $P=(1,-1,2)$ puntua dute komunean. Horrez gain r eta π elkarzutat dira. Bestalde, $Q=(1,2,3)$ puntua π planoan dago eta $v=(0,0,2)$ bektoreak bi muturrak π planoan dauzka. Aurki ezazu r zuzenaren ekuazioa.

Sol: $\{x=1+t, y=-2, z=2\}$

49. Izan bitez r eta s ondoko zuzenak: $r: \begin{cases} x+y-z=3 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}$. Izan

bedi P , $z=0$ planoaren eta s zuzenaren arteko ebaki-puntua. Aurkitu P puntua eta r zuzena partetzat dituen planoaren ekuazioa.

Sol: $2x+y-6z-9=0$

50. Plano bati buruz, ondoko datuak ezagunak dira:

a) $A=(0,0,0)$ eta $B=(0,0,2)$ puntuak planoan daude.

b) A eta B puntuetatik distantzia berdinerak dagoen eta $r: \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$ zuzenean dagoen C puntua planoan dago.

Aurkitu planoaren ekuazioa.

Sol: $x-y=0$

51. Plano bati buruz, ondoko datuak ezagunak dira:

a) $P=(1,2,1)$ eta $Q=(1,2,3)$ puntuak planoan daude.

b) R zuzena eta π planoaren arteko S ebaki-puntua ere planoan dago, r eta π ondokoak

$$\text{izanik } r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases} \quad \pi: x+y+z=0$$

Aurkitu planoaren ekuazioa

Sol: $\{x=1+s+2t, y=2+s+2t, z=1-s-2t\}$

52. Izan bitez R_1 eta R_2 ondoko bi zuzenak $R_1: \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases}$ eta $R_2: \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$. Aur-

kitu R_1 zuzena barruan duen eta R_2 zuzenaren eta $\pi: x-3y-2z+7=0$ planoaren ebaki-puntutik igarotzen den planoaren ekuazioa.

Sol: $\{x=2/5t, y=1-7/5u-t, z=2-11/5u-9/5t\}$

53. Izan bitez $P=(1,2,a)$ puntua, $a \neq 0$ izanik, eta $\pi: x+y+2z-3=0$ plano. Kalkulatu π planoaren bitarteko P puntuaren puntu simetrikoaren koordinatuak

Sol: $((3-2a)/3, (6-2a)/3, -a/3)$

54. Izan bedi r ondoko ekuazio jarraitua duen zuzena: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Izan bitez

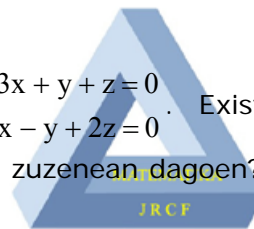
$\pi_1: x+y+z=1$ ekuazioko plano eta $\pi_2: x+y-z=1$ ekuazioko. P_1 puntua r zuzenaren eta π_1 planoaren arteko ebaki-puntua bada eta P_2 puntua r eta π_2 planoaren artekoa, aurkitu bi puntu horiek eta zehazten duten segmentuaren luzera.

Sol: $\sqrt{6} u$

55. Aurkitu ondoko zuzenaren ekuazio parametrikoa $r: \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. Existitzen al da

s parametroaren baliorik non $(-3, s, s)$ puntua aurreko zuzenean dagoen? Erantzuna arrazoitu baiezkoa zein ezezko izatekotan

Sol: $\{x=-3t, y=7t, z=2t\}$; Ez



56. a parametroaren balio guztietarako, $P=(1,2,3)$ eta $A=(0,1,a)$ puntuak planoaren batekiko simetrikoak dira. Aurkitu, era arrazoituan, plano horren ekuazioa. Bereziki plano hori aurkitu $a=2$ denean.

Sol: $x+y+z+(a^2-13)/2=0$; $x+y+z-9/1=0$

57. Aurkitu a eta b parametroek bete behar dituzten baldintzak $Q=(2,a,b)$ puntua $A=(1,3,1)$, $B=(1,0,-1)$ eta $C=(0,0,2)$ puntuek zehazten duten planoan egon dadin.

Sol: $a=(12+3b)/2$

58. Kalkulatu ondoko moduan definitutako $r: \begin{cases} x = 1 - 3\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 + 2\alpha \end{cases}$ zuzenaren ekuazio kartesiarra.

Existitzen al da α parametroaren baliorik non (α, α, α) puntua r zuzenean dagoen? Erantzuna arrazoitu.

Sol: $\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$; Ez dago zuzenean.

59. Izan bitez $P=(a,b,0)$ eta $Q=(1,2,3)$ puntuak. Existitzen al da a eta b parametroen baliorik non $R=(0,0,1)$ puntua P eta Q puntuetatik igarotzen den zuzenean dagoen? Ezezkoan erantzuna arrazoitu. Baiezkotan a eta b parametroen balioak kalkulatu.

Sol: $a = -1/2$ eta $b = -1$

60. Kalkulatu $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,1)$ eta $C=(1,1,1)$ puntuetatik igarotzen den planoaren ekuazio parametrikoa eta ekuazio implizitua. Existitzen al da u parametroaren baliorik non $(3, 2u, u+3)$ puntua planoan dagoen? Erantzuna arrazoitu, eta baiezkoa izatekotan u parametroaren balioa kalkulatu

Sol: $\{x=1-t, y=t+s, z=t+s\}, y-z=0$; Bai; $u=3$

61. Izan bitez $P=(1,2,2)$ eta $Q=(2,a,a)$ espazioko puntuak. Aurkitu a parametroaren balioa P eta Q puntuetatik igarotzen den zuzena koordenatu-jatorritik ere igaro dadin. Aurkitu zuzenaren ekuazioa bi planoaren arteko ebakidura bezala eta modu parametrikoa.

Sol: $a=4$; $\{x=t, y=2t, z=2t\}$

62. Izan bitez $x+y+z=1$ ekuazioko π plano eta $P=(1,-1,0)$ puntua. Aurkitu P puntuaren simetrikoa π planoarekiko, kalkulu horretarako erabilitako prozedura azalduz.

Sol: $(5/3, -1/3, 2/3)$