1. Bi zuzenen posizio erlatiboak

- Bi zuzenak era bektorialean, parametrikoan edo jarraian emanda daudenean.

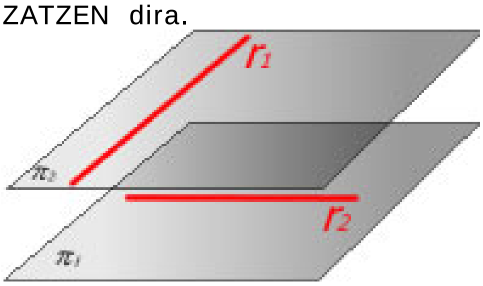
$$r:\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases} \quad \textit{eta} \quad s:\begin{cases} B(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{w}(w_1, w_2, w_3) \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases} \quad s:\begin{cases} x = x_1 + \alpha w_1 \\ y = y_1 + \alpha w_2 \\ z = z_1 + \alpha w_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r:\begin{cases} x_1 - x_0 = \alpha v_1 - \beta w_1 \\ y_1 - y_0 = \alpha v_2 - \beta w_2 \\ z_1 - z_0 = \alpha v_3 - \beta w_3 \end{cases}$$

Hiru ekuazio eta bi ezezaguneko (α, β) sistema Roucheren teorema erabiliz ikertuko dugu:

$$M_1,\ M_2 = \left(\begin{array}{cc|c} v_1 & w_1 & x_1 - x_0 \\ v_2 & w_2 & y_1 - y_0 \\ v_3 & w_3 & z_1 - z_0 \end{array}\right)$$

- hein(M_1)=2=hein(M_2) S.B. zehaztua → Bi zuzenak puntu batean ebakitzen dira.
- hein(M_1)=2 eta hein(M_2)=3 S.BE., ez du puntu komunik, baina hein(M_1)=2 denez, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreak askeak dira eta noranzkoa desberdina dute. Beste talde $\vec{v}, \vec{w}$ eta $\overrightarrow{AB}$ bektoreak ez dira planokideak, askeak direlako. Beraz, puntu komunik ez badute eta planokideak ez badira → bi zuzenak GURUTZATZEN dira.



- hein(M_1)=1=hein(M_2) S.B. zehaztugabea, bi zuzenak infinitu puntu komun dituzte → KOINTZIDENTEAK dira.
- hein(M_1)=2 eta hein(M_2)=2 S. BE. Da, ez dute puntu komunik. Baina hein(M_1)1 denez, $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektoreak menpekoak dira eta noranzkoa berdina dute $(\vec{v} = \alpha\, \vec{w})$

- Bi zuzenak, bi planoren ebakidura bezala emanda daudenean

Izan bitez,

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$ bi zuzen.

$$M_1,\ M_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{array}\right)$$

- hein(M_1)=3=hein(M_2) S.B. zehaztua → bi zuzenak puntu batean ebakitzen dira.

- $hein(M_1)=3 \quad hein(M_2)=4$ S.BE. ez du emaitzarik eta bi zuzenak GURUTZATZEN dira.
- $hein(M_1)=2=hein(M_2)$ S.B. zehaztugabea, infinitu emaitza ditu eta bi ekuazio hartu behar dira. Baina 1. eta 2. ekuazioak askeak dira eta 3. eta 4. ekuazioak ere. Beraz, bi zuzenak KOINTZIDENTEAK dira.
- $hein(M_1)=2 \quad hein(M_2) \; =3$ S.BE., bi zuzenak ez dute puntu komunik, PARALELOAK dira.

Ariketak: Or. 163 → 1, 2

2. Bi planoren arteko posizio erlatiboak

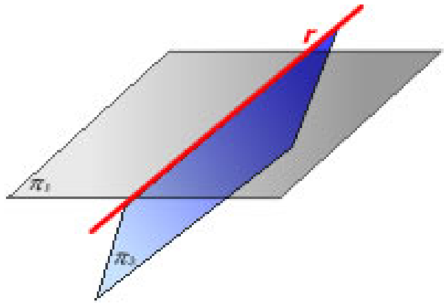
Har ditzagun ondoko bi planoak $\begin{cases} \pi: Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$

Bi planoak elkar ebaki daitezke, paraleloak izan daitezke edo bat etor daitezke. Iker dezagun emandako ekuazio sistema ondoko bi matrizeak ikertuz

$$M1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} \qquad M2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D \end{pmatrix}$$

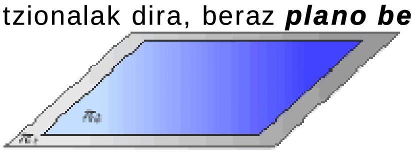
Matrizeen heinak aztertuz gero ondorio hauek lortzen dira:

- hein(M1) = hein(M2) = 2 sistemak soluzioa du baina planoak ez datoz bat: zuzen batean ***elkar ebakitzen*** dute.



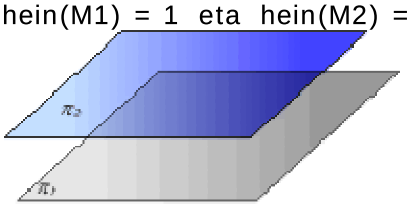
Adibidea: $\begin{cases} 2x+3y-5z+2=0 \\ 3x-4y+2z-3=0 \end{cases}$

- hein(M1) = hein(M2) = 1 (A,B,C,D) eta (A_1,B_1,C_1,D_1) koefizienteak proportzionalak dira, beraz ***plano bera*** da.



Adibidea: $\begin{cases} 2x+3y-z+8=0 \\ -4x-6y+2z-16=0 \end{cases}$

- hein(M1) = 1 eta hein(M2) = 2 ez du emaitzarik bi planoak ***paraleloak*** dira.



Adibidea: $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ 6x-2y+2z=7 \end{cases}$

3. Zuzen bat eta plano baten arteko posizio erlatiboak

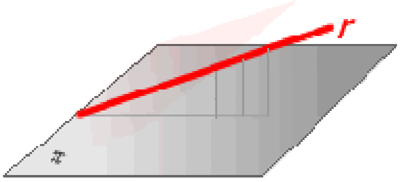
Izan bitez $r:\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \end{cases}$ zuzena eta $\pi: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ planoa.

Zuzena eta planoa elkar ebaki daitezke, paraleloak izan daitezke edo zuzena planoan egon daiteke. Iker dezagun emandako ekuazio sistema ondoko bi matrizeak ikertuz

$$M1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

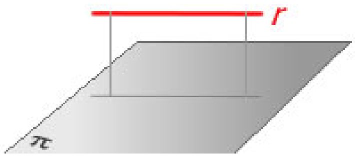
Matrizeen heinak aztertuz gero ondorio hauek lortzen dira:

- hein(M1) = hein(M2) = 3 hiru ekuazioak betetzen dituen hirukote bakar bat existitzen da. Planoa eta zuzena **puntu** batean ebakitzen dira.



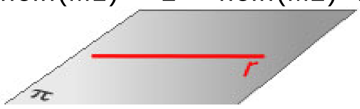
Adibidea: $r:\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$ eta $\pi: x-y+3z=5$

- hein(M1) =2 eta hein(M2) = 3 ez du emaitzarik. Zuzena eta planoa **paraleloak** dira.



Adibidea: $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ eta $\pi: 2x+y+4z=3$

- hein(M1) = 2 = hein(M2) Zuzena **planoan** dago.



Adibidea: $r:\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ eta $\pi: 4x+y-z=3$

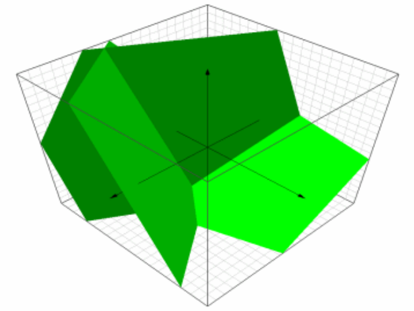
4. Hiru planoren arteko posizio erlatiboak

Izan bitez $\begin{cases} \alpha: Ax+By+Cz+D=0 \\ \beta: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \gamma: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ hiru plano. Iker dezagun emandako ekuazio sistema ondoko bi matrizeak ikertuz

$$M1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

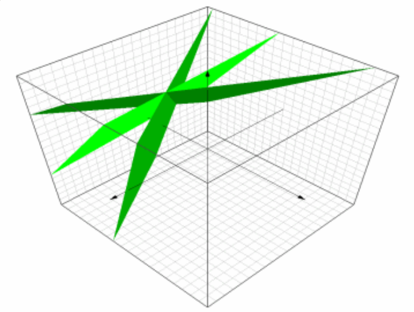
Matrizeen heinak aztertuz gero ondorio hauek lortzen dira:

- hein(M1)=3=hein(M2) Hiru planoek osatzen duten triedroaren erpinean ebakitzen dira. Hiru planoak **puntu batean** ebakitzen dira.



Adibidea: $\begin{cases} x+y+z-2=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \\ x+2y+z-4=0 \end{cases}$

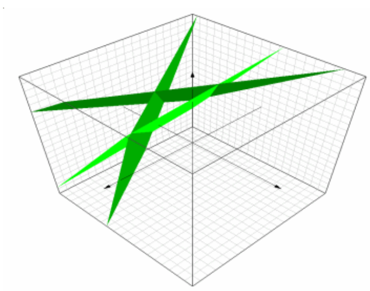
- hein(M1)=2=hein(M2) Bi ekuazio aske daude eta bestea hauen konbinaketa lineal bat da. Bi ekuazio (plano) askeek hartzerakoan **zuzen batean** ebakitzen dira.

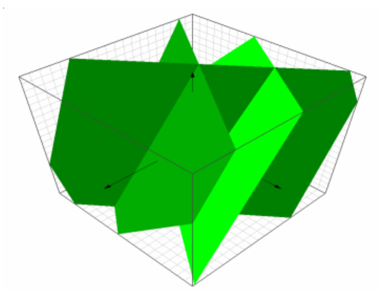


Adibidea: $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ 2x-y+3z+5=0 \\ 3x+2z+7=0 \end{cases}$

- hein(M1)=2=hein(M2) Sistema ekuazio aske bakar batera mugatzen da, beste bi planoak honen konbinaketa direlarik. Hau da, hiru planoak **kointzidenteak** dira.

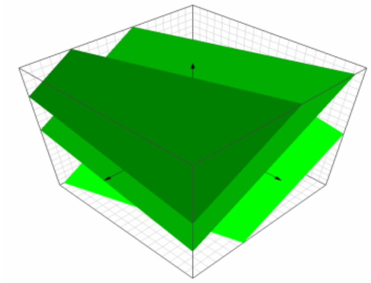
- hein(M1)=2 eta hein(M2)=3 Hiru planoek ez dute puntu komunik eta ondoko propietatea betetzen dute, bi kasu daudelarik: "***Bi planok zuzen bat mugatzen dute, hirugarrena zuzenarekiko paraleloa izanik***"





Adibidea: $\begin{cases} 2x-y-z+6=0 \\ 3x-y+z+5=0 \\ 4x+2y-2z+1=0 \end{cases}$

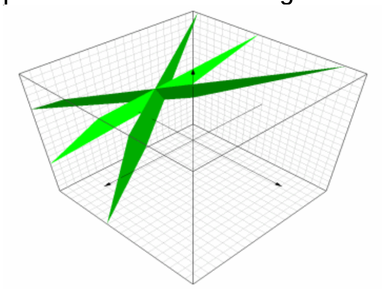
- hein(M1)=1 eta hein(M2)=2 hiru planoak **paraleloak** izango dira.



Adibidea: $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 4x - 2y + 6z = -5 \\ -2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

5. Plano-sorta. Plano-mataza

- Puntu batetik pasatzen den plano multzoari, puntua erpintzat duen *plano-mataza* deitzen zaio.
  Izan bedi $P(x_1,y_1,z_1)$ puntu bat eta $Ax+By+Cz+D=0$ plano baten ekuazioa. P puntua plano horretakoa bada: $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ izango da eta $D= - Ax_1-By_1-Cz_1$
  Orduan $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$
  P puntutik igarotzen diren planoen ekuazioa dugu. Plano-mataza deitzen zaio.



- R zuzen bat emanik, zuzena barne daukaten planoen multzoari r ebakidura-zuzena duen plano-sorta esaten zaio.
  Suposa dezagun ondoko zuzena $r:\begin{cases} \alpha: Ax + By + Cz + D = 0 \\ \beta: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$
  S eta t zenbaki errealak eta nuluak ez badira,
  $S(Ax+By+Cz+D) + t(A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$
  Erlazioa, r ebakidura-zuzena duen plano-sortaren ekuazioa da.
  Eta $t \neq 0$ denean, α planoa ezik, sortako beste plano guztien ekuazioa lortzen da.

  $\frac{s}{t}(Ax + By + Cz + D) + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ eta $\frac{s}{t} = \lambda \in R$ izanik,

  $\lambda(Ax+By+Cz+D) + A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

  Bi planoek osatzen duten zuzenean ebakitzen diren planoen ekuazioa.
  Emandako bi planoak paraleloak badira, emandako plano bati paraleloak diren planoen multzoa honakoa da

  $Ax+By+Cz+D=\lambda$

Ariketak: Or. 167 → 1, 2

6. **Ekuazio, aldagaien, parametroen … inguruko hausnarketa**

- Ekuazio inplizituak.
  $2x+y-z=3$; $6x-y+2z+5=0$; → planoak dira
  $x^2+y^2+z^2=16$ → esfera bat da
  $x^2+y^2=16$ → zilindro bat da.

- Ekuazio parametrikoak
  Parametro bakarra duen ekuazioak lerro bat deskribatzen du.
  Bi parametro dituenak, gainazal bat.

Ariketak: Or. 168 → 1