ANGELUAK

1. Bi zuzenen arteko angeluak. Paralelotasuna eta perpendikulartasuna

r eta s bi zuzenek eratzen duten angelua, beraiek mugatzen duten planoan osatzen duten angelurik txikiena da.

Izan bitez, $r:\begin{cases} A(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{v}(v_1, v_2, v_3) \end{cases}$ eta $s:\begin{cases} B(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{w}(w_1, w_2, w_3) \end{cases}$ bi zuzen. r eta s zuzenen arteko angelua beraien bektore zuzentzaileek eratutako angelua da.

$$\cos(r,s) = \frac{|\vec{v} \bullet \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

- Bi zuzen paraleloak izango dira $\text{ang}(r,s) = 0^{\circ} \Leftrightarrow \vec{v} = t\,\vec{w} \Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = t\,(w_1, w_2, w_3)$

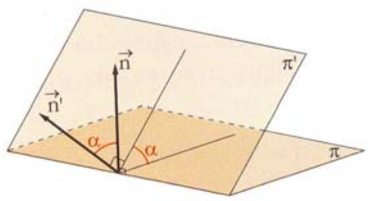
  $$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$$

- Bi zuzen elkarzutak dira
  $\text{ang}(r,s) = 90^{\circ} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \bullet \vec{w} = 0 \Leftrightarrow v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$

2. Bi planoren arteko angelua. Paralelotasuna eta perpendikulartasuna

π eta π_1 planoek eraturiko angelua eta euren bektore normalek eraturikoa berdinak dira.
Bi planok osaturiko angelua hauxe da

$$\cos\ (\pi\pi\ \pi_1) = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{n}_1|}{|\vec{n}||\vec{n}_1|}$$



- Bi plano paraleloak dira beraien bektore normalak paraleloak direnean

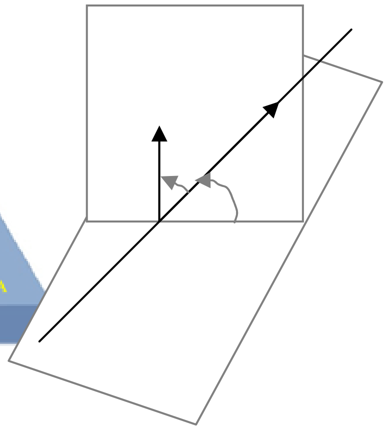
  $$\vec{n} = t\,\vec{n}_1 \Leftrightarrow \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

- Bi plano elkarzutak dira
  $ang(\pi, \pi_1) = 90^{\circ} \Leftrightarrow \vec{n} \bullet \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$

3. Zuzen baten eta plano baten arteko angelua. Paralelotasuna eta perpendikulartasuna

Zuzen baten eta plano baten arteko angelua zuzen horrek planoaren gaineko bere proiekzioarekin eratzen duena da. Angelu hori eta zuzenak planoaren norabide normalarekin eratzen duen angelua osagarriak dira
.

$$\sin\alpha = \sin(\vec{v},\vec{n}) = \cos(90^{o}-\alpha) = \frac{|\vec{v}\bullet\vec{n}|}{|\vec{v}|\,|\vec{n}|}$$



- Zuzena eta planoa paraleloak izango dira
  $\vec{v}\perp\vec{n} \iff \vec{v}\bullet\vec{n}=0 \iff v_1A+v_2B+v_3C=0$
- Zuzena eta planoa elkarzutak dira
  $$\vec{v}=t\,\vec{n} \iff \frac{v_1}{A}=\frac{v_2}{B}=\frac{v_3}{C}$$

Ariketak: Or. 183 → 1, 2

DISTANTZIAK

4. Bi punturen arteko distantzia

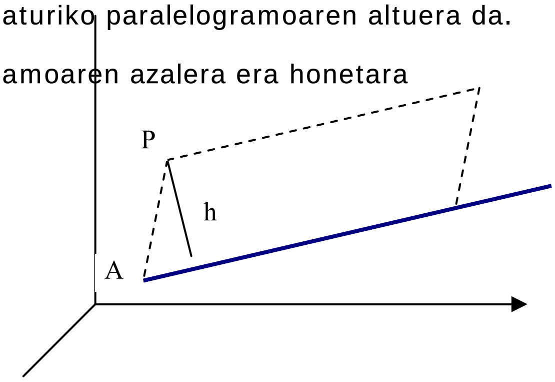
$A=(a_1,a_2,a_3)$ eta $B=(b_1,b_2,b_3)$ bi punturen arteko distantzia $\overrightarrow{AB}$ bektorearen modulua da.

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

5. Puntu eta zuzen baten arteko distantzia

Izan bitez $P(x_0,y_0,z_0)$ puntua eta $r:\begin{cases}A(a_1,a_2,a_3)\\ \vec{v}(v_1,v_2,v_3)\end{cases}$ zuzena. P puntua eta r zuzenaren arteko distantzia $\overrightarrow{PA}$ edo $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ bektoreek mugaturiko paralelogramoaren altuera da.

$\overrightarrow{PA}$ eta $\vec{v}$ bektoreek mugatzen duten paralelogramoaren azalera era honetara emanda dator:



$S=\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v}\right|$ edo $S=|\vec{v}|\bullet h$

$\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v}\right|=|\vec{v}|\bullet h$

$$h=d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Beste forma bat.
P puntutik igarotzen den eta r zuzenari elkarzuta den planoaren (π) ekuazioa
Bilatu π eta r-ren arteko ebakidura (P')
D(P,P') da D(P,r)

6. Puntu batetik plano baterako distantzia.

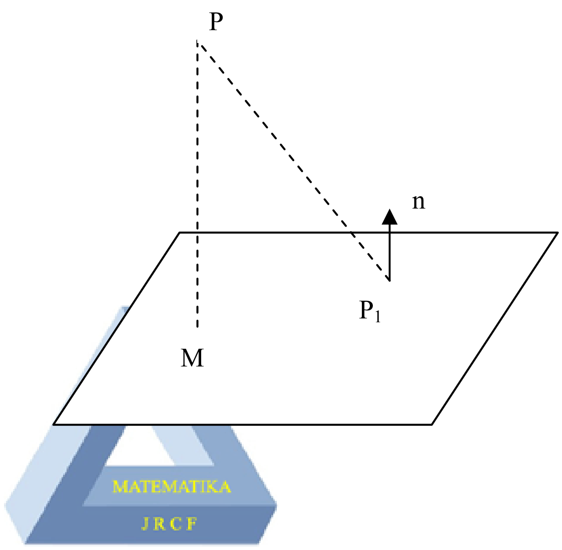
Izan bitez $P(x_0,y_0,z_0)$ puntua eta $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ planoa. P puntutik planora dagoen distantzia P puntuaren eta planoaren gaineko bere proiekzioaren arteko distantzia da.

Distantzia kalkulatzeko 1. metodoa.

- P-tik pasatu eta planoarekiko elkarzuta den zuzenaren (r) ekuazioa bilatu
- $r\cap\pi=P'$ puntua ematen du
- d(P,P') = d(P,π)

Distantzia kalkulatzeko 2. metodoa.
PMP_1 hiruki zuzena denez,

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\bullet|\cos\alpha|$$



Bestalde $\overrightarrow{P_1P}\bullet\vec{n} = \left|\overrightarrow{P_1P}\right| \bullet |\vec{n}| \bullet \cos\,\alpha$

$$\frac{\overrightarrow{P_1P}\bullet\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left|\overrightarrow{P_1P}\right| \bullet \cos\,\alpha$$

$\overrightarrow{P_1P} = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)$ $\quad \vec{n}\,(A,B,C)$

$\overrightarrow{P_1P}\bullet\vec{n} = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1)\ (A,B,C) = \ldots =$

$Ax_0+By_0+Cz_0-Ax_1-By_1-Cz_1$

Baina $P_1 \in \pi$ --> $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ --> $D= \ldots.$

Aurreko bi espresioak kontuan izanik

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7. Bi planoren arteko distantzia

- Bi planoek elkar ebakitzen badute, euren arteko distantzia ZERO da.
- Bi planoek paraleloak badira, bien arteko distantzia plano bateko puntu batetik beste planora dagoen distantzia da.

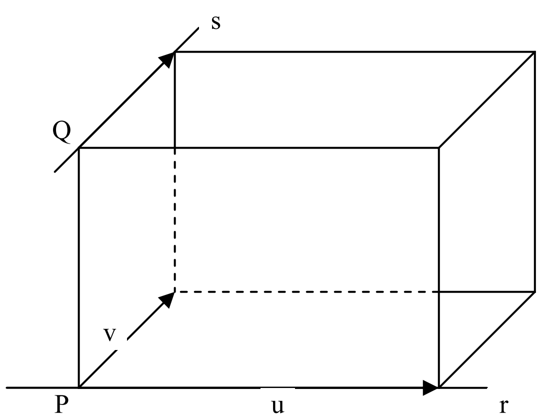
8. Zuzen batetik plano baterako distantzia

- Zuzena eta planoak elkar ebakitzen badira, euren arteko distantzia ZERO da.
- Zuzena eta planoa paraleloak badira, euren arteko distantzia zuzeneko edozein puntutik planora dagoen distantzia da.

9. Bi zuzenen arteko distantzia

- Zuzenak ebakitzen badira, euren arteko distantzia ZERO da.
- Zuzenak paraleloak badira, zuzen bateko puntu bat hartu eta bestera dagoen distantzia kalkulatzen da.
- Zuzenak gurutzatzen badira. Distantzia kalkulatzeko metodo desberdinak daude:
  - R zuzena barne duen eta s zuzenari paraleloa den planoaren ekuazioa bilatu
    s zuzeneko puntu batetik bilatutako planora dagoen distantzia da eskatutakoa.
  - r eta s zuzenen arteko distantzia honela definitzen da:
    $d(r,s)=\min\{d(P,s\ /\ P\in r\}$

    Beraz, r eta s zuzenen arteko distantzia $\vec{u},\vec{v}$ eta $\overrightarrow{PQ}$ bektoreek mugatutako paralelepipedoaren altuera da.Paralelepipedo honen bolumena $\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right]$ biderketa nahasiak emanik dator, eta oinaren azalera $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreen arteko biderketa



bektorialaren bidez. Hau dela eta,

$$V = B.h = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| \bullet h$$

$$V = \left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right]\right| \Rightarrow h = d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

Ariketak: Or. 185 → 1
Or. 186 → 2, 3
Or. 188-189 → 4, 5, 6, 7

Azalera – Bolumena

10. Triangelu baten azalera

Izan bedi ABD triangelua; A, B eta C puntuak mugatzen dutena. Triangeluaren azalera $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ eta $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ bektoreek mugatzen duten paralelogramoaren azalera erdia da,

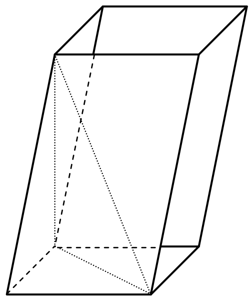
$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

11. Tetraedro baten bolumena

Paralelepipedo batek sei tetraedro ditu

Izan bedi P_1, P_2, P_3, P_4 erpinak dituen tetraedroa; beronen bolumena $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}$ bektoreek mugatzen duten paralelepipedoaren seirena da.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|$$



Ariketak: Or. 191 → 1, 2

Batzuk

12. Bi zuzenekiko elkarzuta den zuzenaren ekuazioa

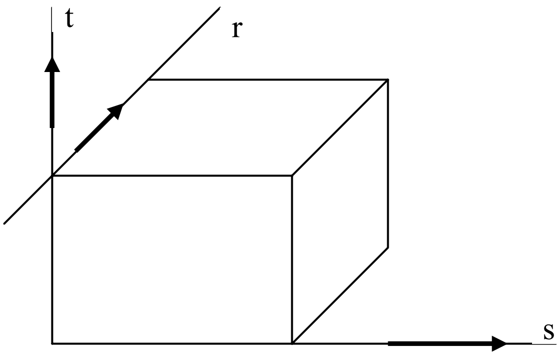
Izan bitez $r:\begin{cases}P_1\\ \bar{u}\end{cases}$ eta $s:\begin{cases}P_2\\ \bar{v}\end{cases}$ gurutzatzen diren bi zuzen. Izan bedi $t:\begin{cases}P(x,y,z)\\ \bar{w}\end{cases}$ bi zuzenekiko elkarzuta den zuzena.

$\bar{w}\perp\bar{u}$ eta $\bar{w}\perp\bar{v}\;\Rightarrow\;\bar{w}=\bar{u}\times\bar{v}$

$\bar{u},\bar{v}$ eta $\overrightarrow{PP_1}$ plano berean daudenez, linealki menpekoak dira; hau da, $\overrightarrow{PP_1}\bullet(\bar{u}\times\bar{w})=0$ (1)

Bestalde, $\overrightarrow{PP_2},\bar{w},\bar{v}$ ere plano berberean daude; beraz, $\overrightarrow{PP_2}\bullet(\bar{v}\times\bar{w})=0$ (2)

(1) eta (2) ekuazioek osatzen duten sistema ebatziz t zuzenaren ekuazioa lortzen da.



13. Puntu baten simetrikoa zuzen batekiko

Def: A eta A' puntuetatik doan zuzena r zuzenarekiko elkarzuta baldin bada, eta gainera A eta A' r zuzen horrekiko distantziakideak baldin badira, A eta A' r zuzenarekiko simetrikoak direla esaten da.

Izan bitez $r:\begin{cases}A(a,b,c)\\ \bar{v}(v1,v2,v3)\end{cases}$ zuzena eta A(x0,y0,z0) puntua. Bila dezagun r zuzenarekiko simetrikoa den A' (a1,b1,c1) puntua.

- Bilatu A puntutik pasatzen diren plano guztien ekuazioa.
- Bilatu plano hauetatik r zuzenari elkarzuta dena
- Kalkulatu r zuzena eta bilatutako planoaren arteko ebaki puntua P(x1,y1,z1)
- AA' zuzenkiaren erdigunea P denez ....

14. Puntu baten simetrikoa plano batekiko

Izan bitez $Ax+By+Cz+D=0$ planoa eta $A(x0,y0,z0)$ puntua. Kalkula nahi dugu A puntuaren simetrikoa $A'(a1,b1,c1)$ planoarekiko.

- A puntutik pasatzen diren zuzenen ekuazioa (r)
- r zuzena planoarekin elkarzuta da; beraz, $\vec{v}$ eta $\vec{n}$ paraleloak dira.
- Bilatu r zuzena eta planoarekiko ebaki puntua $P(x1,y1,z1)$
- AA' zuzenkiaren erdigunea P denez ...

15. Zuzen baten proiekzio ortogonala plano batean

Har ditzagun $r:\begin{cases} P(a1,a2,a3) \\ \vec{v}(v1,v2,v3) \end{cases}$ zuzena eta π: $Ax+By+Cz+D=0$ planoa.

r zuzenaren puntuen proiekzioak π planoaren gainean r' zuzena osatzen dute.
r' zuzen hau, π planoaren gaineko r zuzenaren proiekzio ortogonala da. r' zuzena-ren ekuazioa aurkitzeko, r' zuzenaren bi puntu aurkitu beharko ditugu.
Kasu bi hauek agertzen zaizkigu:

a) Planoa eta zuzena puntu batean elkar ebakitzen dute.

Kasu honetan, r' zuzenaren puntu bat, r eta π planoaren arteko ebakidura da; Q puntua hain zuzen. Beste puntua, Q_1, r zuzenaren puntu baten proiekzio ortogonala da.
Q eta Q_1 ezagutuz, bi puntuetatik pasatzen den zuzenaren ekuazioa izango da r zuzenaren proiekzioa.

b) **Planoa eta zuzena ebakitzen ez direnean**

Zuzena eta planoa paraleloak izango dira. Zuzenaren proiekzioa lortzeko pauso hauek jarraitu behar dira:

- r zuzena barne duten planoen ekuazioa bilatu.
- Plano hauetatik emandakoari elkarzuta dena bilatu π_1
- π_1 eta π planoen ebaketak ematen du eskatutako zuzenaren ekuazioa