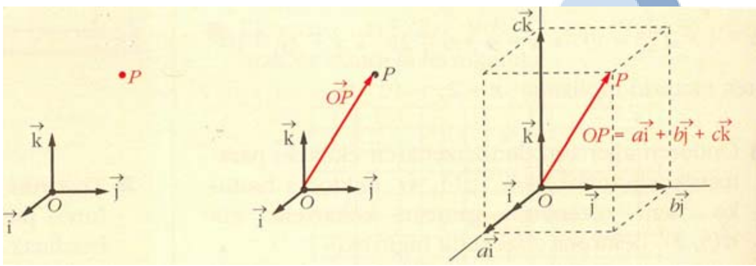
ZUZENA eta PLANOA ESPAZIOAN

1. Erreferentzia-sistema espazioan.

Espazioko erreferentzia-sistema bat da adibidez {O,(**i**, **j**, **k**)} multzoa. Honako osagai hauek ditu:

- Jatorri izeneko puntu finko bat, o
- Bektoreentzako oinarri bat, (**i**, **j**, **k**)



2. Bektoreak problema geometrikoetan erabili

Bi puntu lotzen dituen bektorearen koordenatuak.

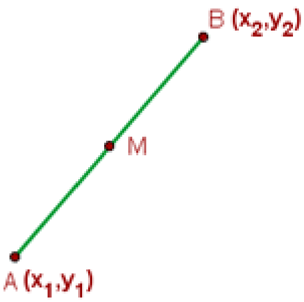
$P(x_1,y_1,z_1)$ eta $Q(x_2,y_2,z_2)$ lotzen dituen bektorearen koordenatuak ondokoak dira:

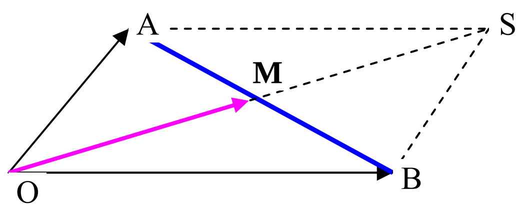
$\overrightarrow{PQ}$ bektorearen koordenatuak = Q, muturraren koordenatuak - P, jatorriaren koordenatuak

Hau da: $\overrightarrow{PQ}=(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Zuzenki baten erdigunea.

$A(x_1,y_1,z_1)$ eta $B(x_2,y_2,z_2)$ muturrak dituen zuzenki baten M, erdigunearen koordenatuak hauek dira:





$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OS}\\ \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OS}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Puntu baten simetrikoa beste batekiko.

P puntuaren simetrikoa Q puntuarekiko P´ da, baldin eta Q bada PP´ zuzenkiaren erdigunea. Beraz, $P(x_1, y_1, z_1)$ eta $Q(x_2, y_2, z_2)$ badira, p´(x,y,z) puntuaren koordenatuak ondoko ekuazioetatik lortzen dira:

$$\frac{x_1 + x}{2} = x_2; \quad \frac{y_1 + y}{2} = y_2; \quad \frac{z_1 + z}{2} = z_2$$

Ariketak: (Anaya argitaletxea 2001 urtean argitaratua)

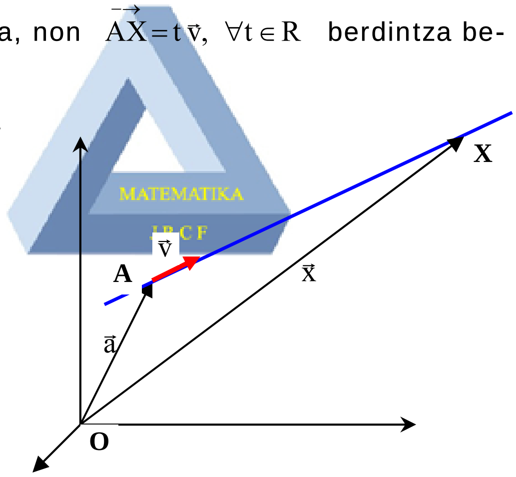
- Orrialdea 156 → 2 – 4

3. Zuzenaren ekuazioak.

- A eta B bi puntu desberdinetatik pasatzen den zuzen bakar bat dago.
- Baita ere, A puntutik pasatuz $\vec{v}$ **norabide bektorea** duen zuzen bakar bat dago.

Teorema: A puntutik eta $\vec{v}$ norabidea duen zuzena honela defini dezakegu:

"Espazioko X(x,y,z) puntuz osaturiko multzoa, non $\overrightarrow{AX} = t\vec{v},\ \forall t \in R$ berdintza betetzen duten.



Izan bedi R={O;i,j,k} erreferentzi sistema cartesiarra ((i,j,k) oinarri ortonormala).

Jo dezagun A(a_1,a_2,a_3) zuzeneko puntu (finko) ezagun bat, $\vec{v}$ (v_1,v_2,v_3) zuzenaren norabide bektorea eta X(x,y,z) zuzeneko edozein puntu (aldakorra) direla.

X, A eta $\vec{v}$-ren bidez definitutako eta zuzeneko puntua izan dadin beharrezkoa da $\overrightarrow{AX}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki menpekoak izatea; hau da, $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$

Baina $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} \Rightarrow \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

Zuzenaren ekuazio bektoriala.

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + t\,(v_1,v_2,v_3)$$

Zuzenaren ekuazio parametrikoak

Ekuazio bektorialetatik abiatuz, ondorengo ekuazio eskalar hauek lortzen dira:

$$(x,y,z) = (a_1 + t\,v_1,\ a_2 + tv_2,\ a_3 + tv_3) \rightarrow \begin{cases} x = a_1 + t\,v_1 \\ y = a_2 + t\,v_2 \\ z = a_3 + t\,v_3 \end{cases}$$

Zuzenaren ekuazio jarraitua

Ekuazio parametrikoetatik t bakanduz ondoko ekuazioa lortzen da:

$$t = \frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

Bi puntuk mugatzen duten zuzenaren ekuazioa

Izan bitez $A(a_1,a_2,a_3)$ eta $B(b_1,b_2,b_3)$ zuzeneko edozein bi puntu. Dakigunez A eta B puntuetatik zuzen bakarra pasatzen da.

$\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ zuzenaren norabide bektoreetariko bat da. Hau da,

$$\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Norabide bektorearen osagaiak zuzenaren ekuazio jarraian ordezkatuz,

$$t = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

Zuzenaren ekuazioa forma inplizituan (edo cartesiarra)

Ekuazio linealak ikertzerakoan ikusi zenuten $ax + by + cz + d = 0$ ekuazio batek plano bat adierazten duela eta bi planok osaturiko ekuazio linealen sistema batek zein zuzenetan ebakitzen diren adierazten digula ere. Zuzena forma inplizituan adi-eraz daiteke:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

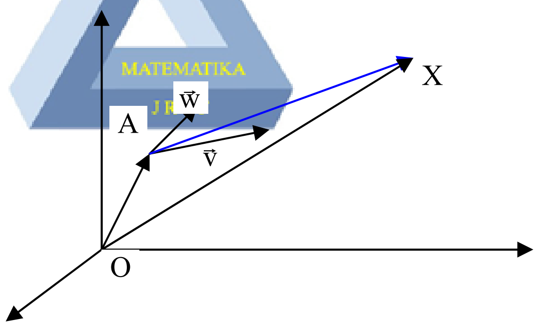
Ariketak: Or. 159 → 2, 3, 4

4. Planoaren ekuazioak

Plano bat espazioan honela definitu daiteke:

- Lerrokideak ez diren hiru punturen bidez.
- Ebakitzen diren bi zuzenen bidez.
- Puntu bat eta bi bektore eskeren bidez.

Jo dezagun $A(a_1,a_2,a_3)$ planoko puntu (finko) bat dela, $\vec{v}\,(v_1,v_2,v_3)$ eta $\vec{w}\,(w_1,w_2,w_3)$ planoko bi bektore aske eta $X(x,y,z)$ planoko edozein puntu.
X puntua, A puntuak eta $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektore askeek mugaturiko planokoa izan dadin beharrezkoa da $\overrightarrow{AX}, \vec{v}, \vec{w}$ bektoreek planokideak izatea; beraz, linealki independenteak. Hau da, $\overrightarrow{AX} = \alpha\,\vec{v} + \beta\,\vec{w}$



Planoaren ekuazio bektoriala.

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}$$

$$\mathbf{(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \alpha\ (v_1,v_2,v_3) + \beta\,(w_1,w_2,w_3)}$$

Planoaren ekuazio parametrikoak

Ekuazio bektorialetatik abiatuz, ondorengo ekuazio eskalar hauek lortzen dira:

$$\begin{cases} x = a_1 + \alpha\, v_1 + \beta\, w_1 \\ y = a_2 + \alpha\, v_2 + \beta\, w_2 \\ z = a_3 + \alpha\, v_3 + \beta\, w_3 \end{cases}$$

Planoaren ekuazio inplizitua (edo cartesiarra edo inplizitua)

Planoko ekuazio parametrikoak honela ipin daitezke:

$$\begin{cases} x - a_1 = \alpha\, v_1 + \beta\, w_1 \\ y - a_2 = \alpha\, v_2 + \beta\, w_2 \\ z - a_3 = \alpha\, v_3 + \beta\, w_3 \end{cases}$$

Hiru ekuazio eta bi ezezagun (α eta β) ditugu. Sistemak soluzioa izan dezan, matrize zabalduaren determinanteak zero izan behar du.

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x - a_1 \\ v_2 & w_2 & y - a_2 \\ v_3 & w_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinantea kalkulatuz,

$$(x-a_1)\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - (y-a_2)\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + (z-a_3)\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = 0$$

$A(x-a_1) + B(y-a_2) + (z-a_3) = 0$

...

$$\mathbf{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Lerrokaturik ez dauden hiru puntuk mugaturiko planoa.

Izan bitez $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$ eta $C(z_1,z_2,z_3)$ lerrokaturik ez dauden hiru puntu. Planoko bi bektore $\overrightarrow{AB}$ eta $\overrightarrow{AC}$ dira, beraien koordenatuak ondokoak izanik:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$ $\vec{w} = \overrightarrow{AC} = (\ c_1-a_1,\ c_2-a_2,\ c_3-a_3)$

Lortutako planoaren ekuazio parametrikoetan ordezkatuz eta lortzen den sistemak soluzioa izan dezan ondoko baldintza eman behar da:

$$\begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 & x-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 & y-a_2 \\ b_3-a_3 & c_3-a_3 & z-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Puntu bat eta bektore normal bat ezagututa planoaren ekuazioa.

Datu ezagunak dira: $P(x_0,y_0,z_0)$ planoko puntua eta
$\vec{n}\ (n_1,n_2,n_3)$ planoaren bektore normala.

$X(x,y,z)$ planoko edozein puntu bada, $\overrightarrow{PX}$, $\vec{n}$ -arekiko elkarzuta da.

$\overrightarrow{PX} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{PX} \bullet \vec{n} = 0$ denean. Hau da,

$n_1\ (x-x_0) + n_2\ (y-y_0) + n_3\ (z-z_0) = 0$

Planoaren ekuazio inplizituarekin konparatzen badugu zera lortzen da:
Plano baten bektore normala $\vec{n}\,(A,B,C)$ dela.

Ariketak: Or. 165 → 1

5. Planoaren kasu bereziak

Plano baten ekuazio orokorra **Ax + By + Cz + D = 0** bada, (hiru ardatzek ebakitzen dituena)

- D=0 bada, planoa jatorritik pasatzen da.
- A=0 bada, OX planoari paraleloa da.
- B=0 bada, OY planoari paraleloa da.
- C=0 bada, OZ planoari paraleloa da.
- A=B=0 bada, OXY planoari paraleloa da.
- A=C=0 bada, OXZ planoari paraleloa da.
- B=C=0 bada, OYZ planoari paraleloa da.